

### 3 Границы объёмов кодов. Коды Хэмминга

- Граница Хэмминга:  $|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^t C_n^i}$ , где  $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$   
(код, достигающий границы Хэмминга, называется *совершенным*).
- Граница Синглтона:  $|C| \leq 2^{n-d+1}$   
(код, достигающий границы Синглтона, называется *МДР-кодом*).
- Граница Варшамова-Гилберта для линейных кодов:  
если  $\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i < 2^r$ , то существует линейный  $[n, k, d']$ -код, такой что  $k \geq n - r$  и  $d' \geq d$ .
- Граница Плоткина:  $|C| \leq 2 \lfloor \frac{d}{2d-n} \rfloor$ , если  $n < 2d$ .

Линейный двоичный код, проверочная матрица которого состоит из всевозможных различных ненулевых столбцов длины  $r$ , называется *кодом Хэмминга* с  $r$  проверками на четность. Двоичные коды  $C$  и  $C'$  *эквивалентны*, если существуют такие  $\pi \in S_n$  и  $x \in E^n$ , что  $x + \pi(C) = C'$ . Код *максимален*, если его мощность максимальна при данных  $n$  и  $d$ .

---

**3.1** Верно ли, что код, исправляющий  $t$  ошибок, обнаруживает

- а) не менее  $2t + 1$  ошибок;
- б) не менее  $2t$  ошибок;
- в) не более  $2t$  ошибок?

**3.2** Определить параметры двоичного кода Хэмминга. Доказать, что двоичный код Хэмминга единствен с точностью до эквивалентности.

**3.3** Пусть в канале связи используется код Хэмминга длины 7, столбцы проверочной матрицы которого лексикографически упорядочены. Пусть на приемном конце получено слово (0110110). Декодировать его и найти информационный блок.

**3.4** Построить проверочную матрицу с  $r$  строками  $q$ -значного кода Хэмминга, вычислить параметры кода.

**3.5** Построить проверочную матрицу

- а) с двумя строками для троичного кода Хэмминга. Построить код;
- б) с тремя строками для троичного кода Хэмминга.

**3.6** Обобщить для  $q$ -значных кодов границы

- а) Хэмминга;
- б) Синглтона;
- в) Варшамова-Гилберта.

**3.7** Доказать, что  $q$ -значный код Хэмминга является совершенным.

**3.8** Существует ли двоичный (16, 10, 9)-код?

**3.9** Показать, что не существует максимальных кодов мощности 3.

**Теория к Семинару 4 "Способы построения кодов".**

Добавление проверки на четность. Выкалывание кодовых координат. Код с выбрасыванием. Пополнение кода путем добавления новых кодовых слов. Удлинение кода путем добавления информационных символов. Укорочение кода. Ортогональный код, построение кода, ортогонального данному линейному. Конструкция Плоткина.